EX8 :

$\|\vec{u}\|=1$; $\|\vec{v}\|=4$; $\vec{u}.\vec{v}=2$; $\vec{w}=2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}$

* $\vec{u}.\vec{w}=\vec{u}.(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})=2\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{u}.\vec{v}=0-3\vec{u}.\vec{v}=-6$ ($\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$ car $\vec{u}\perp(\vec{u}\wedge\vec{v})$)

* $\vec{v}.\vec{w}=2\vec{v}.(\vec{u}\wedge\vec{v})-3\vec{v}.\vec{v}=0-3\|\vec{v}\|^2=-3(4)^2=-48$

* $\|\vec{w}\|^2=(2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v})^2=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9\|\vec{v}\|^2-12(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{v}=4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+9(4)^2-0=144+4\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$

or

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow 2=1\times4\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\Rightarrow\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|=1\times4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

d'où $\|w\|^2=144+4(2\sqrt{3})^2=192\Rightarrow\|w\|=\sqrt{192}=8.\sqrt{3}$

EX9 :

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$; $\vec{u}\perp\vec{v}$; $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$

1) * $\vec{v}\perp(\vec{w}\wedge\vec{v})\Rightarrow\vec{v}.(\vec{u}-\vec{w})=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{w}=0\Rightarrow\vec{v}.\vec{w}=0$ (car $\vec{v}.\vec{u}=0$) $\Rightarrow\vec{w}\perp\vec{v}$

* on a: $\vec{u}=\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2\Leftrightarrow1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2+2\vec{w}.(\vec{w}\wedge\vec{v})$

$\Leftrightarrow 1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|^2$ *or* $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})\right|$ ($\vec{w}\perp\vec{v}\Rightarrow\sin(\widehat{\vec{w},\vec{v}})=1$)

d'où $\|\vec{w}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{w}\|.\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|$ on aura donc : $1=\|\vec{w}\|^2+\|\vec{w}\|^2=2\|\vec{w}\|^2$

$$\Rightarrow\|\vec{w}\|^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) en général, lorsque : $\|\vec{t}\|=\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{t}\perp\vec{k}$ | on a : $(\vec{t},\vec{k},\vec{t}\wedge\vec{k})$:R.o.n direct
et on a aussi : $\vec{k}\wedge(\vec{t}\wedge\vec{k})=\vec{t}$; $(\vec{t}\wedge\vec{k})\wedge\vec{t}=\vec{k}$

on a : $\vec{w}\perp\vec{v}$, $\|\vec{v}\|=1$, $\|\vec{w}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\left(\sqrt{2}\vec{w},\vec{v},\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})\right)$ est un repère orthonormé direct

$\Rightarrow\vec{v}\wedge\sqrt{2}(\vec{w}\wedge\vec{v})=\sqrt{2}\vec{w}\Rightarrow\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{v})=\vec{w}$ et comme : $\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{u}-\vec{w}$ $\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge(\vec{u}-\vec{w})\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{w}$

$\Rightarrow\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{u}+\vec{w}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{v}+(\vec{u}-\vec{w})\Rightarrow 2\vec{w}=\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}\Rightarrow\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$